

Методы оптимизации
Васильев Фёдор Павлович, Артемьева Людмила Анатольевна
Литература:

- 1) Книжки лектора (2 тома); Васильев, "МО", МЦНМО, 2011;
- 2) "МО", Васильев, Тютюнов, Будаков, Артемьева, 2017, "Крайт";
- 3) "Линейное программирование", Васильев, Ивановский, "Факториал", 2008;

❖ (1) - слишком много; (2), (3) - слишком мало $\Rightarrow$ ходить на лекции!

Посещения (проверка знания) $\Rightarrow$ досрок (как доп. попытка) - письменный, при спорных вопросах еще и устный

"Я люблю обе стороны математики:
чистую - как возвышенный уход от реальности,
и прикладную - как страстное стремление к жизни"
© Томас Страате

План:

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Т Вейерштрасса (4 лек.) | } Мат. аппарат |
| 2. Дифференцирование (3 лек.) | |
| 3. Э-ты выпуклого анализа (3 лек.) | |
| 4. МО (3 лек.) | } Методы реш-ва |
| 5. Правило множителей Лагранжа (3 лек.) | |
| 6. Линейное программирование (6 лек.) | |
| 7. ОУ (3 лек.) | |
| 8. Метод стабилизации (1 лек.) | |

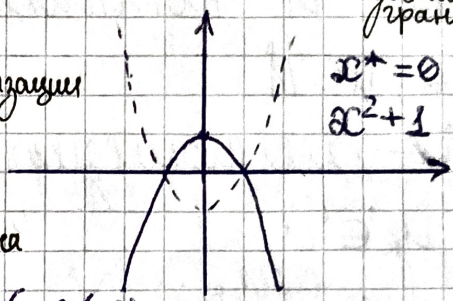
1) Постановка задачи

$Y(u)$ — функционал, а мы хотим минимизировать
 Основная задача $\Rightarrow Y(u) \rightarrow \inf, u \in U \subseteq M(1)$
 $Y_* = \inf_{u \in U} Y(u), u_* \in U_* = \{u \in U: Y(u) = Y_*\}$ // все u из U , на Y достиг-ся точная нижн. грань
 (хотим найти) $u \in U$

! Задача максимизации $Z(u) \rightarrow \sup, u \in U$

$Y(u) \stackrel{\text{def}}{=} -Z(u)$

$Y(u) \rightarrow \inf, u \in U$ // новая задача



Связь: $U_* = U^*$ (мин-во т. min), $\sup_u Z(u) = -\inf_u (-Z(u))$ // например

Разрешима ли задача?

$\inf = -\infty \Rightarrow$ нет; , $\inf = 0$, но какое u ? $\Rightarrow$ нет

∇ (Вейерштрасса) [классич. вариант]

$U = \mathbb{R}^n$, $Y(u)$ — непр. ф-ция, U — замкн. и огр. (компакт) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1) Y_* > -\infty$ (конечный);

2) $U_* \neq \emptyset$

(+ верх. грань аналогично, очевидно $\Rightarrow Y^* < +\infty, U^* \neq \emptyset$)
 // Цель: сформировать в бесконечномерном пр-ве

2) Метрический вариант ∇ Вейерштрасса

U — метрич. пр-во, $g(u, v)$ — расстояние от $u \in U$ до $v \in U$ (метрика)

Непр. в т. x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

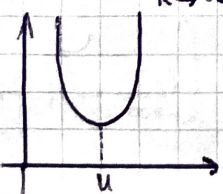
То Коши $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \underbrace{f(x_0) - \varepsilon \leq f(x)}_{\text{полунапр. снизу}} \leq \underbrace{f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon}_{\text{полунапр. сверху}}, \forall x:$

$g(x, x_0) < \delta$

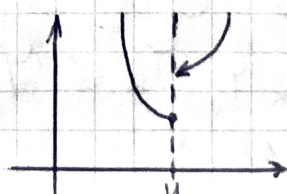
Опр $Y(u)$ наз-ся полунапр. снизу в т. $u \in U$, if $\forall \{u_k\} \in U$:

$\{u_k\} \xrightarrow[\text{(слабо)}]{s} u \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) \geq Y(u)$ [сверху] $\lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) \leq Y(u)$

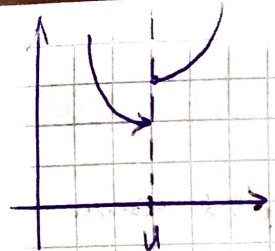
Примеры



// Непр.

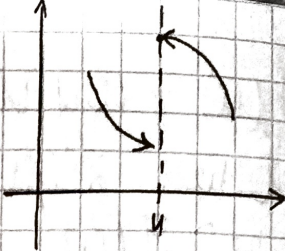
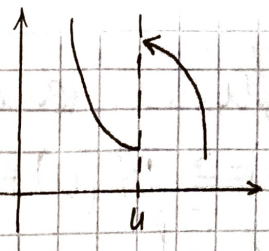


// Полунапр. снизу



// Полунепр. (н/н) сверху

D/3



Опр Мн-во U — компактное, if $\forall \{u_k\} \in U \exists \{u_{k_m}\}$:

$\{u_{k_m}\} \rightarrow u, u \in U$

Опр $\{u_k\}$ — минимизирующая (в исх. задаче минимизации), if: 1) $u_k \in U$;

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) = Y_*$

Минимизирующая посл-ть $\exists$ всегда (см. след. $\blacktriangle$)

Опр $\{u_k\} \rightarrow U_*$ (сильно сх-ся к мн-ву),

if $d(u_k, U_*) = \inf_{u \in U_*} d(u_k, u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

∇ (Вейерштрасса) [метрич. вариант] I.1.

∇ М-метрич. пр-во, $Y(u)$ — н/н снизу и конечн (принимает конечн. знач-я), U -комп. $\Rightarrow$ 1) $Y_* > -\infty$,

2) $U_* \neq \emptyset$,

3) $\forall \{u_k\}$ — мин. посл-ть $\xrightarrow{g}$ -сх-ся (сх-ся сильно) к U_*

(о максимизации речи уже нет)

$\blacktriangle \nabla \forall \{u_k\}$ — минимизирующая в з-те (1) Миним. посл-ть $\exists$ всегда.

1) $Y_* = -\infty$, $\exists u_k: \lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) = Y_*$;

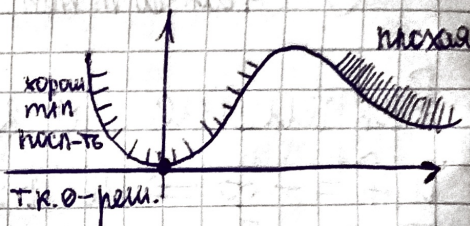
2) $Y_* > -\infty$ по опр.

a) $\forall u \in U: Y(u) \geq Y_*$;

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in U: Y(u) < Y_* + \varepsilon$

П.е. $\exists \{u_k\} Y_* \leq Y(u_k) < Y_* + 1/k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) = Y_*$

Предлагаем $\blacktriangle$



$\{u_k\} \in \mathcal{U}$ — компакт $\Rightarrow \exists u_{klm} \xrightarrow{s} u_* \in \mathcal{U}$ // в силу опр. комп-ти
 $\gamma_* \leq \gamma(u_*) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma(u_{klm}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(u_k) = \gamma_* \Rightarrow \gamma(u_*) = \gamma_*$
по опр. inf н/н снизу опр. мин. пал-ти

$\Rightarrow \gamma_* > -\infty, u_* \in \mathcal{U}_* \Rightarrow \mathcal{U}_* \neq \emptyset$

Д-М (3): $a_k = g(u_k, u_*) \geq 0$;

$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{klm} \leq +\infty$

$\{u_{kl}\} \in \mathcal{U}$ — компакт $\Rightarrow \exists u_{klm} \xrightarrow{s} u_*, u_* \in \mathcal{U}_*$

$g(u_{klm}, u_*) = a_{klm} = \inf_{v \in \mathcal{U}_*} g(u_{klm}, v) \leq g(u_{klm}, u_*) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(u_{klm}, u_*) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

$g(u_{kl}, u_*)$ — в силу! предела $\Rightarrow \lim a_k = \lim a_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim a_k = 0 \blacksquare$

! Зам. Шар $B = \{u \in H : \|u\| \leq 1\}$ — не компакт.

$\{e_k\} \in H$ — ортонорм. с-ма, $\langle e_k, e_m \rangle = \begin{cases} 1, & k=m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$ $\{e_k\}$ — не

сходящаяся

$\|e_k - e_m\|^2 = \underbrace{\|e_k\|^2}_{=1} - 2\underbrace{\langle e_k, e_m \rangle}_{=0} + \underbrace{\|e_m\|^2}_{=1} = 2 \not\rightarrow 0$ (нельзя

выделить с-с-я к элем.-ту), т.е.

3) Слабый вариант Т Вейерштрасса

H — гильбертово пр-во, $\langle u, v \rangle_H$ — скаляр произведение,

$g(u, v) = \|u - v\|, \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Опр $\gamma(u)$ — слабо н/н снизу в т. $u \in \mathcal{U}$, if $\forall \{u_k\} \xrightarrow{\text{слабо}} u$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(u_k) \geq \gamma(u)$

Опр Слабая с-с-ть: $\{u_k\} \xrightarrow{\text{слабо}} u$, if $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle, \forall c \in H$

Опр Сильная с-с-ть: $u_k \xrightarrow{\text{сильно}} u$, if $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$

Сильная с-с-ть $\Rightarrow$ слабая с-с-ть (но не наоборот!)

Слабо н/н ф-ций $\prec$. Слабо с-с-я посл-тей $\succ$, чем сильно с-с-я

$\text{нпр} \quad \mathcal{U}(u) - \text{слабо нпр, if } \forall \{u_k\} \xrightarrow{\text{слабо}} u \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{U}(u_k) = \mathcal{U}(u)$
 сп. нпр.

$\text{нпр} \quad \text{мн-во } \mathcal{U} \subset H \text{ слабо компактно, if } \forall \{u_k\} \in \mathcal{U}, \exists \{u_{k_m}\} \xrightarrow{\text{слабо}} u, u \in \mathcal{U}$

$\text{нпр } \{u_k\} \text{ слабо сх-ся к } u_*, \text{ if } \forall \text{ ее предельная } t \in \mathcal{U}_*$

∇ (Вейерштрасса) [слабый вариант] I.2. $\mathcal{U} = H$ - $\text{нпр. пр-во, } \mathcal{U}(u) - \text{слабо п/н снизу и конечн, } \mathcal{U} - \text{слабо комп.} \Rightarrow$

1) $\mathcal{U}_* > -\infty$;
 2) $\mathcal{U}_* \neq \emptyset$;
 3) $\forall \{u_k\} - \text{мнн. сх-ся слабо к } \mathcal{U}_*$

▲ Аналогично пред. ∇ . Заменяем «сильно» на «слабо».
 $\forall \{u_k\} - \text{мнн. посл-ть } \in \mathcal{U} - \text{сл. комп.} \Rightarrow \exists \{u_{k_m}\} \xrightarrow{\text{слабо}} u \in \mathcal{U}$
 $\mathcal{U}_* \leq \mathcal{U}(u_*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{U}(u_k) = \lim \mathcal{U}(u_k) = \mathcal{U}_* \Rightarrow \mathcal{U}_* = \mathcal{U}(u_*) > -\infty$
 $\mathcal{U}_* \neq \emptyset, \forall u_* \in \mathcal{U}_*$

$\rightarrow \text{слабо п/н снизу} \quad \rightarrow \text{миним. посл-ть}$

$\mathcal{U}_* \neq \emptyset, \forall u_* \in \mathcal{U}_*$
 $\rightarrow \text{слаб. пред. т.}$

н) Комментарии к ∇_1 и ∇_2

Пример 1 (компакт. мн-во) $\mathcal{U} = C[a, b]$ // банахово, но не гильбертово

$d(u, v) = \max_{a \leq t \leq b} |u(t) - v(t)|$

$\mathcal{U} = \{u(t) \in C[a, b] : |u(t) - u(\tau)| \leq L |t - \tau|, \forall t, \tau \in [a, b], \exists L > 0 \text{ (уст. Липшица), } |u(a)| \leq C_0 = \text{const}\} \subset C[a, b]$

Покажем, что $\mathcal{U}$ - компакт.

▲ Равн. ограниченность (д/ ∇ Арцелá) $[\exists \vartheta > 0 : \forall x \in X, \forall n \Rightarrow |f_n(x)| \leq \vartheta]$

$|u(t)| = |u(t) - u(a) + u(a)| \leq |u(t) - u(a)| + |u(a)| \leq L |t - a| + C_0 \leq C_1$

Равн.степ. нпр-ть (снова д/ ∇) $[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \forall x', x'', |x' - x''| < \delta, \forall n]$

$$|u(t) - u(\tau)| \leq L |t - \tau| < L\delta = \varepsilon, \text{ if } \delta = \varepsilon/L \Rightarrow \text{if no } \delta \text{ exists} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \{u_k(t)\} \in \mathcal{U} \exists \{u_{km}(t)\} \in \mathcal{U} \text{ с.с. равн. к } u(t) \in C[a, b]$$

$$\left. \begin{aligned} |u_{km}(t) - u_{km}(\tau)| &\leq L |t - \tau|, \\ |u_{km}(a)| &\leq C_0 \end{aligned} \right\} m \rightarrow \infty \Rightarrow |u(t) - u(\tau)| \leq L |t - \tau|,$$

$$|u(a)| \leq C_0 \Rightarrow u(t) \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{компакт.}$$

Пример 2 Ортонорм. с-ма $\{e_k\}$ с.с. слабо, т.е. $\{e_k\} \xrightarrow{\text{с.с.}} 0$

$$\xrightarrow{\text{с.с.}} 0_H \quad \parallel \langle C, e_k \rangle \rightarrow \langle C, 0 \rangle \parallel$$

C н-н. 0H-т 0H

$$\forall C \in H, C = \sum_k C_k e_k, C_k = \langle C, e_k \rangle - \text{коэф. Фурье}$$

$$0 \leq \|C - \sum_{k=1}^N C_k e_k\|^2 = \|C\|^2 - 2 \langle C, \sum_{k=1}^N C_k e_k \rangle + \|\sum_{k=1}^N C_k e_k\|^2 =$$

$$= \|C\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N C_k \underbrace{\langle C, e_k \rangle}_{C_k - \text{коэф. Фурье}} + \sum_{k=1}^N C_k^2 \Rightarrow \|C\|^2 - \sum_{k=1}^N C_k^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^N C_k^2 \leq \|C\|^2 \Rightarrow \{N \rightarrow \infty\} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2}_{\text{с.с.}} \leq \|C\|^2 \Rightarrow \text{с.с.}$$

н-н. с.с.}

$$C_k \rightarrow 0 \Rightarrow \langle C, e_k \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \text{слабая с.с.} \quad \parallel \text{сумма в/слабой} \parallel$$

<C, 0>

с.с. с.с.-тб // компакти-ти шара